Ogólna teoria miary
Lista 7

Zad 1. Opisać za pomocą skokowej funkcji Heaviside'a dystrybuantę dowolnego skończonego rozkładu prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$.

Zad 2. Niech $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} H(x - \frac{1}{n})$, gdzie $H(x)$ jest funkcją Heaviside'a. Uzasadnić, że F jest dystrybuantą i obliczyć $\mu_F([\frac{1}{5}, \frac{1}{4}])$.

Zad 3. Niech

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2}x & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 1 & x \in (\frac{2}{3}, +\infty). \end{cases}$$

Wyznaczyć miarę μ_F

a) zbioru liczb niewymiernych,

b) zbioru Cantora.

Zad 4. Rozważmy dystrybuantę postaci $F(x) = \frac{1}{3}F_1(x) + \frac{1}{3}F_2(x) + \frac{1}{3}F_3(t)$, gdzie F_1 jest dystrybuantą Cantora, F_2 dystrybuanta rozkładu jednostajnego na odcinku $[0, 1]$, natomiast

$$F_3(x) = \frac{1}{2}H\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}H\left(x - \frac{8}{9}\right).$$

Wyznaczyć miarę μ_F

a) zbioru liczb niewymiernych,

b) zbioru Cantora,

c) przedziału $[a, b]$ gdzie $a = (0,(21))_3$ i $b = (0,222)_3$.

Zad 5. Pokazać, że każde odwzorowanie ciągłe jest borelowskie.

Zad 6. Pokazać przykład funkcji borelowskiej nieciągłej w żadnym punkcie.

Zad 7. Pokazać przykład rzeczywistej funkcji, która nie jest borelowska, ale jej kwadrat już tak.

Zad 8. Niech $(X, \mathcal{F}_1)$, $(Y, \mathcal{F}_2)$ będą przestrzeniami mierzalnymi. Wyznaczyć wszystkie odwzorowania mierzalne $f : X \to Y$, gdy

$$a) \quad \mathcal{F}_1 = \{X, \emptyset\}, \qquad b) \quad \mathcal{F}_1 = 2^X, \qquad c) \quad \mathcal{F}_2 = \{Y, \emptyset\}.$$

Zad 9. Wyznaczyć $\mathcal{F}$-mierzalne funkcje rzeczywiste na X, jeśli $\mathcal{F} = \{X, A, X \setminus A, \emptyset\}$.

Zad 10. Sprawdzić, że rodzina podzbiorów $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R}^2 : (x, y) \in A \;\Rightarrow\; (y, x) \in A\}$$

jest σ-algebrą. Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste funkcje $\mathcal{F}$-mierzalne na $\mathbb{R}^2$.

Zad 11. Niech $f : X \to \mathbb{R}$ gdzie $X = \{0, 1, 2\}$ i $f(x) = x$. Wyznaczyć wszystkie σ-algebry $\mathcal{F}$ na X takie, aby f było odwzorowaniem $\mathcal{F}$-mierzalnym.